MAI 1 - cvičení - nekonečné číselné řady

I. Definice konvergence, resp. divergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, def. $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ (s_k – částečný součet)

$\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje, tt.-li $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = s \in R$

$\sum_{1}^{\infty} a_n$ diverguje, když $\lim_{k\to\infty} s_k = \pm\infty$ nebo posloupnost $\{s_k\}$ limitu nemá

Bolzano - Cauchy podmínka konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \forall p\in N : \left|\sum_{n}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon$$

nutná podmínka konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Příklady:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q|<1 \quad (\text{zde rozumíme } 0^0 = 1)$$

a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverguje pro $|q| \geq 1$.

(i) pro $q=1$ je $s_k = k$, $\lim_{k\to\infty} s_k = +\infty$

(ii) pro $|q|>1$ je: $\lim q^n = +\infty$ pro $q>1$; $\{q^n\}$ limitu nemá pro $q\leq -1$ $\Big\} \Rightarrow \sum_{0}^{\infty} q^n$ diverguje pro $q>1$ a $q\leq -1$

(iii) pro $|q|<1$: $s_{k+1} = \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$, $\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = 0$ pro $|q|<1$,

tedy $\lim_{k\to\infty} s_{k+1} \left(= \lim_{k\to\infty} s_k\right) = \dfrac{1}{1-q}$

2. Je dána posloupnost $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = a - a_1$$

$$s_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_k - a_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) =$$
$$= a_{k+1} - a_1$$
tedy, $\lim_{k\to\infty} s_k = a - a_1 \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \right)$

odtud: $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (harmonická řada):

Vezmeme $\displaystyle s_{2k} - s_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$,

$\displaystyle \frac{1}{k+j} \geq \frac{1}{2k}$ pro $j = 1, \dots, k$

tedy, k $\varepsilon = \frac{1}{2}$ pro lib. $k \in \mathbb{N}$ existuje $p = k$ tak, že
$|s_{k+p} - s_k| \geq \frac{1}{2} \ (= \varepsilon)$ $\Rightarrow$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje

(B-C. podmínka)

4. Vyšetřete, zda dané řady konvergují, resp. divergují:

(i) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1}$ diverguje, neboť $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2} \neq 0$

(není splněna nutná podmínka konvergence řady)

(ii) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{k+1} - 1 \right) = +\infty$

(rozšíření zlomku výrazem $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$), tedy řada diverguje.

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-3})^k = \frac{1}{1-e^{-3}}$

(součet geometrické řady s $q = e^{-3} < 1$)

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in (-1,1)$

geometrická řada s kvocientem $q = -x^2$ - je konvergentní pro $|-x^2| < 1$, tj. pro $x \in (-1,1)$, jinak diverguje

Cvičení:

1. Pokuste se sečíst řadu (nebo ukažte, že řada diverguje):

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n}$ $(= -1)$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ $\left(= \frac{1}{2}\right)$ (rozložte $\frac{1}{4k^2-1}$ na rozdíl dvou zlomků)

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ (diverguje)

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (diverguje)

(v) Dokažte: a) $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $\sum_{1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, pak také $\sum_{1}^{\infty} (a_n+b_n)$ konverguje a $\sum_{1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{1}^{\infty} a_n + \sum_{1}^{\infty} b_n$

b) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje, $c \in \mathbb{R}$, pak také konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ a platí: $\sum_{1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$

(vi) Ukažte (dle definice), že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje

(lze užít odhad $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{k}$ – viz matematické indukce)

(nebo $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$)

(vii) Užitím analytických součtů řad (dokáže se v MAI 3)
(konvergenci i my dále)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

a $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \text{ pro lib. } a \in R$$

sečtěte řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \quad (= \ln 4 - 1) \,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} \quad (= 3e^2) \,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad (= 2e)$$

II. Vyšetřování konvergence řady

(konvergence, resp. divergence řady nezávisí na konečně
1. mnoho členech řady, když dále budeme předpokládat,
že předpokládané vlastnosti mají všechny členy řady
(bez újmy na obecnosti)

1. test – $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

např. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergují

ale: $\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ konverguje – pozor!!

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergují!

2. kritéria konvergence – „zkoumání" posloupnost částečných součtů pomocí vlastností, které nám umožní určit konvergenci (resp. divergenci) posloupnosti (ani není nutné „spočítat" limitu)

A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$: (analog. pro $a_n \leq 0$)

posloupnost částečných součtů je neklesající (resp. nerostoucí), pak $\lim_{k\to\infty} s_k \in R \Leftrightarrow \{s_k\}$ je shora omezená (resp. zdola)

odtud – srovnávací kritéria

(i) $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$, $\sum_{1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje
($\Leftrightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} b_n$ diverguje)

srovnávací řady: $\sum_{0}^{\infty} q^n$ konv. $\Leftrightarrow |q|<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konv. $\Leftrightarrow p>1$

odtud: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in N$
a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje;

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n 3^n} \le \frac{1}{3^n}$ $\forall n \in N$ a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje

---

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{n}}$ konverguje, neboť $\frac{1}{(n+3)\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\forall n \in N$ a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konverg.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ diverguje, neboť $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} \ge \frac{\sqrt{n}}{2n} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$ a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverguje

---

$\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)}$ a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje (viz část 1)

(ii) <u>limitní srovnávací kritérium</u>

$0 < a_n \le b_n$, pak platí:

je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

<u>Cvičení</u>: promyslete, co lze říci o konvergenci $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$, když $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Příklady: Vyšetřit konvergenci řad:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ konverguje, neboť:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-n+1} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje}$$

„hledání" srovnávací řady – a vyšetřování limit posloupností „vidíme", že posloupnost $\left\{\frac{1}{n^2-n+1}\right\}$ se „chová" jako $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (při hledání limit je rozhodující nejvyšší mocnina)

---

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverguje:

$\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ se chová jako $\frac{1}{\sqrt{n}}$: tj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverguje}$$

(srovnávací řada)

Pozn.: „absolutní srovnání" zde nejde – $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, ale z divergence „větší" řady ~~ale~~ nelze soudit na divergenci řady „menší"

---

3) Známe asi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ze střední školy)

odtud: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ diverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$$

a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje

ale $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^2}$ a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje

Cvičení: vyšetřete, zda řada konverguje nebo diverguje:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ (d) ; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}001}$ (d), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ (d) ;

3) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ (k) ; 4) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ (k) ; 5) $\sum_{1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ (k) ;

6) $\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$ (d) ; 7) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$ (k.)

8) $\sum_{1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right)$ (k) ; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\dots n!}{(2n)!}$ (k).

9) pro jaká $a>0$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$?.

(iii) Kritéria Cauchyho a D'Alambertova (srovnání s geometrickou řadou)

Cauchyho limitní kritérium:

$0 \le a_n$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$; pak pro $a<1$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

pro $a>1$ $\sum a_n$ diverguje.

D'Alambertovo limitní kritérium

$0 < a_n$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$; pak pro $a<1$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

pro $a>1$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Pozn: Je-li $a=1$, pak limitní kritéria nic nedokáží, je třeba užít jiná kritéria – např. nelimitní Cauchyho nebo D'Alambertovo, nebo jiné (Raabeho, integrální)

Příklady:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ konverguje:

D'alamb.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Cauchy: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} = \frac{1}{3}$

$\underset{(\text{D'al., Cauch.})}{\Longrightarrow} \sum \frac{n^2}{3^n}$ konverguje.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje pro všechna $a>0$:

D'alamb.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 \ (<1)$,

tedy (D'alam. limitní krit.) řada konverguje

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$ konverguje:

Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{3}$, tedy

řada (Cauchyho limitní krit.) konverguje

4) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konverguje:

D'alamb.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ diverguje

Cauchy: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1$ – nelze nic říci

ale: $\displaystyle a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \geq 1 \quad \forall n \in N$, tedy

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy řada diverguje

(také lze užít nelimitního Cauch. kritéria:
$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nek. mnoho $n \in N \Rightarrow \sum a_n$ diverguje)

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$:

opět: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, ale zde $\displaystyle\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n+2} < 1$,

tedy nelze užít ani nelimitního Cauch. kritéria,
ale:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\to 1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

, tedy řada diverguje

Cvičení: vyšetřete konvergenci řad:

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n$ (k); $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ (k); $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ (k)

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ (d), $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (d); $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (k)

$\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$ (k)

B) Řady s libovolnými členy

1. Absolutní konvergence:

$$\sum_1^\infty |a_n| \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_1^\infty a_n \text{ konverguje}$$

2. Alternující řady $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$

(Leibniz) Je-li $a_n \geq 0$, $\{a_n\}$ nerostoucí posl., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pak $\sum (-1)^{n-1} a_n$ konverguje.

Příklady:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje absolutně pro všechna $a \in R$

$a=0$ – snadné; $a \neq 0$:

$\sum\limits_1^\infty \frac{|a^n|}{n!}$ konverguje pro v. $|a| \in (0,+\infty)$ (viz oddíl A1),

tedy $\sum\limits_0^\infty \frac{a^n}{n!}$ konverguje absolutně pro v. $a \in R$

(a jejš součet je e^a – viz MAI 3)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ konverguje absolutně:

$$\sum_1^\infty \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \text{ konverguje}$$

3) $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ nekonverguje absolutně, neboť $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$ diverg.,

ale dle Leibnizova kritéria konverguje (neabsolutně), neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající posloupnost

4) Stejně: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}$ konverguje neabsolutně:

(i) $\sum_1^\infty |a_n| = \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverguje (srovnávací krit.)

(ii) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right\}$ je klesající posloupnost, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$,

tedy řada konverguje (Leibniz)

5) $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ konverguje neabsolutně:

(i) $\sum_1^\infty |a_n| = \sum_1^\infty \frac{n}{n^2+1}$ diverguje (srovnávací krit.)

(ii) ale: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ a posloupnost $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ je klesající:

? $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \overset{?}{\leq} \frac{n}{n^2+1}$ $n \in N$:

$(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\leq} n[(n+1)^2+1]$

$1 \leq n^2 + n$ ... platí pro v. $n \in N$

Pozor! Když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \geq 0$, ale posloupnost $\{a_n\}$ není monotonní, pak nelze obecně o konvergenci řady $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$ nic říci – řada může konvergovat i divergovat! (Viz další příklady)

Příklad 1) $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ diverguje, i když $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$

$\frac{2+(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$

$\left\{\frac{2+(-1)^n}{n}\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ není monotonní jak je to s konvergencí?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right) -$$

kdyby daná řada konvergovala, pak, protože i řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je řada konvergentní, by konvergovala i řada $\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n}$ –

– což je spor ($\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n}$ je divergentní řada)

<u>Příklad 2</u>) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \dots$$

<u>konverguje neabsolutně</u>

1) <u>absolutní konvergence</u>: $\frac{1}{n+(-1)^n} \geq \frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverg. $\Rightarrow$

$\underset{\text{srovn. krit.}}{\Rightarrow}$ $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n}$ diverguje

2) <u>neabsolutní konvergence</u>:

$$S_{2n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k(2k+1)} = S \in R,$$

neboť $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)}$ je konvergentní řada (srovn. krit.)

a $$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\Big(S_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{\to 0}\Big) = \lim S_{2n} = S$$, tedy

i $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (a tedy řada konverguje)

Cvičení: Vyšetřte absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1} \quad (\text{k. absolutně}) \; ; \quad \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \quad (\text{k. absolutně})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad (\text{k. neabsolutně}) \; ; \quad \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n} \quad (\text{k. neabsolutně})$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \quad (\text{diverguje})$$

V závislosti na parametru $a \in R$ vyšetřte absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n\,3^n}$$ (konvg. ab. pro $a \in (-3,3)$, neab. pro $a=-3$, jinde diverguje)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$$ (konverg. ab. pro $a \in (-1,1)$, neab. pro $a=-1$, jinde diverguje)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}(a+1)^n$$ (konverguje ab. pro $a \in \langle -2, 0 \rangle$, jinde diverguje)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+2)^n}{\sqrt{n+1}}$$ (konvg. absolutně pro $a \in (-3,-2)$, neab. pro $a=-3$, jinde diverguje)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$$ (konvg. ab. pro $a \in (-e, e)$)